Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS INDUSTRIES CÉRAMIQUES • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsic.fr/assets/annales/bts-ic/E2 - Mathématiques/2023/BTS IC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance f(t), en centimètres, entre le fond du tiroir et celui du meuble est étudiée pendant la fermeture, avec t exprimé en secondes. Le travail porte sur une équation différentielle, les conditions initiales, l’atteinte d’un seuil de fermeture, les variations et la position moyenne du tiroir.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Un produit est nul si et seulement si au moins l’un de ses facteurs est nul. On résout donc séparément les deux équations du premier degré obtenues.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L’équation caractéristique associée est celle de la question précédente. Ses deux racines sont réelles et distinctes. Le tableau fourni indique alors que les solutions de l’équation différentielle sont des combinaisons linéaires des exponentielles associées aux racines.

1. Pour la racine -1, le terme associé est $C_1 e^{-t}$.
2. Pour la racine -4, le terme associé est $C_2 e^{-4t}$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales

Question 2.a. Sachant qu’à l’instant t = 0 le point M est situé à 20 cm du point O et se déplace vers O à la vitesse négative de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance OM, exprimée en centimètres. À l’instant initial, cette distance vaut 20 cm. Sa vitesse de variation est donnée par la dérivée $f'(t)$; le signe négatif indiqué signifie que la distance diminue au début de la fermeture.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression admise. La distance cherchée s'écrit donc exactement :

1. $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$.
2. Cette expression est la distance OM, en centimètres, deux secondes après le début de la fermeture.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = \dfrac{70}{3}e^{-2} - \dfrac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}157$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Le constructeur affirme qu'il est fermé en moins de 4 secondes. Dire s'il a raison et justifier.**

À 4 secondes, la distance vaut $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm. La fonction est continue, et la distance initiale vaut 20 cm : elle passe donc sous le seuil de 0,5 cm avant 4 secondes.

- Seuil de fermeture : 0,5 cm.
- À 4 secondes : distance inférieure au seuil.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Les deux exponentielles tendent donc vers 0, et leur combinaison linéaire tend également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ à l'infini est finie. La courbe se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée égale à cette limite.

> Une limite égale à 0 donne une asymptote horizontale confondue avec l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, le signe moins initial et la dérivée de e^{-4t} donnent un terme positif : $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Sur l'intervalle considéré, $f'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 0.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant si nécessaire les lignes suivantes jusqu'à son arrêt. Pour chaque ligne, donner la valeur de f(t) arrondie au centième et indiquer si le test f(t) > 0,5 est vrai ou faux.

La boucle incrémente t de 0,1 tant que $f(t) > 0,5$. Les valeurs sont arrondies au centième, comme demandé dans le tableau du sujet.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Test**
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le test devient faux à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3{,}8$, le test est encore vrai. L'algorithme ajoute alors 0,1 et teste $t = 3{,}9$. Comme $f(3{,}9) \approx 0{,}47 < 0{,}5$, la condition devient fausse et la boucle s'arrête. Le seuil a donc été franchi avant la fin de l'exécution.

1. Valeur de sortie : $t = 3{,}9$.
2. Le tiroir est fermé selon le seuil défini.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s à la sortie ; le tiroir est alors fermé.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. On évalue ensuite l'intégrale aux bornes 0 et 4, puis on divise par 4 :

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left(\frac{45}{2} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right).$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16} \approx 5{,}518159$ cm.

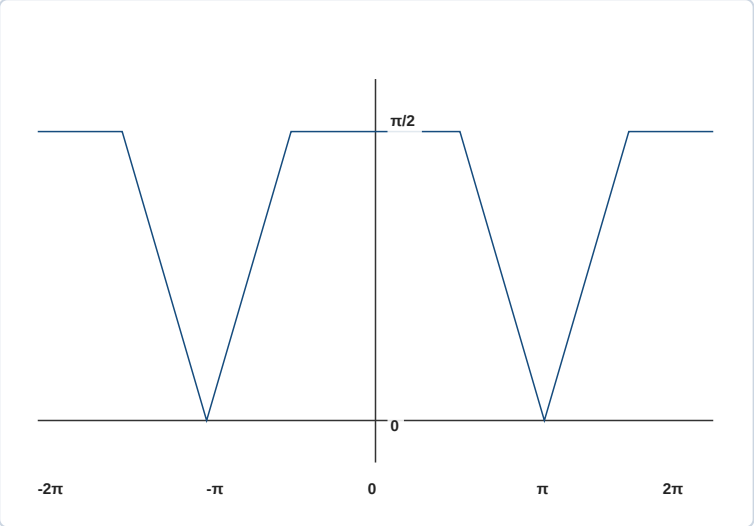
2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice porte sur une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], et sur le développement de cette fonction en série de Fourier. Il évalue le tracé périodique, le calcul des coefficients, l'identification d'une somme partielle et l'approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa périodicité, sa parité et sa définition par morceaux.

Sur $[0;\pi]$, le graphe est horizontal à la hauteur $\frac{\pi}{2}$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, puis descend en ligne droite jusqu'à 0 en π. La parité donne le tracé sur $[-\pi;0]$, puis la période 2π répète le motif sur l'intervalle demandé. On obtient des sommets de hauteur $\frac{\pi}{2}$ aux abscisses $-2\pi, 0, 2\pi$, et des zéros en $-\pi$ et π.

Courbe de f sur [-2π ; 2π]



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Tracé pair et 2π-périodique, de hauteur maximale $\frac{\pi}{2}$, nul aux abscisses $-\pi$ et π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire donne $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$. Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$. L'intégrande $f(t)\sin(nt)$ est impaire puisque f est paire et $\sin(nt)$ impaire. Son intégrale sur $[-\pi;\pi]$ est donc nulle. Cette intégrale symétrique correspond au calcul du coefficient sur une période, d'où le résultat pour tout entier $n \geq 1$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation d'une fonction périodique de période T est définie par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. L'énoncé donne une période $T = 2\pi$. En substituant cette valeur, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation est exprimée en radians par unité de temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant a₀ vaut 3π/8.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Sur une période, la parité permet de doubler l'intégrale de 0 à π. Avec la définition par morceaux, $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt\right]$. Le second terme vaut $\frac{\pi^2}{8}$, donc $a_0 = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8})$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Comme f est paire et $T = 2\pi$, le formulaire donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On découpe l'intégrale aux bornes de la définition par morceaux. Sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, $f(t) = \frac{\pi}{2}$, tandis que sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$, $f(t) = \pi - t$. Le facteur $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}$ du premier terme vaut 1, ce qui donne l'égalité demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. En admettant que aₙ = 2/(πn²)(cos(nπ/2) - cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.

On applique la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi))$. Pour $n = 1$, la différence vaut $0 - (-1) = 1$. Pour $n = 2$, elle vaut $(-1) - 1 = -2$. Pour $n = 3$, elle vaut $0 - (-1) = 1$. En remplaçant n dans le facteur, on obtient les trois coefficients exacts.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. À partir des coefficients obtenus, déduire que s₃(t) = 3π/8 + (2/π)cos(t) - (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients b_n sont nuls. On remplace alors a_0 par $\frac{3\pi}{8}$, puis a_1, a_2, a_3 par les valeurs déterminées à la question précédente. Le regroupement des termes donne directement l'expression demandée.

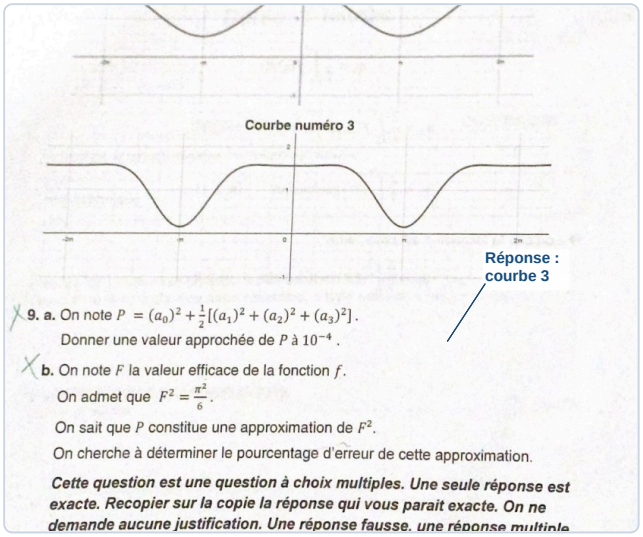
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.

La somme s_3 est paire et 2π-périodique. Son maximum se trouve au voisinage de $t = 0$, et ses minima au voisinage de $t = \pm\pi$. Elle reste positive, avec des creux arrondis aux abscisses $\pm\pi$. Parmi les trois tracés de la page 5/7, ces caractéristiques correspondent à la courbe numéro 3.

Courbe représentant s_3



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour P = $(a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

Avec les coefficients exacts, $P = (\frac{3\pi}{8})^2 + \frac{1}{2}[(\frac{2}{\pi})^2 + (-\frac{1}{\pi})^2 + (\frac{2}{9\pi})^2]$. Les carrés des trois derniers termes ont pour somme $\frac{409}{81\pi^2}$. Ainsi, $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'évaluation numérique puis l'arrondi au dix-millième donnent la valeur demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **On admet que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F². Choisir, parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

Le pourcentage d'erreur relatif de l'approximation de F^2 par P est $\frac{|F^2-P|}{F^2} \times 100$. En utilisant $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$ et la valeur de P calculée à la question précédente, on obtient environ $0{,}074\,\%$. Parmi les trois choix proposés, le plus proche est $0{,}1\,\%$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> 0,1 %

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures et son coefficient varie selon la spécialité : 1,5 ou 2. Ses deux exercices, notés chacun sur 10, étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis une fonction paire périodique par séries de Fourier. Les compétences évaluées incluent calcul, représentation graphique et interprétation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La dérivée $f'(t)$ représente la vitesse de variation de la distance du tiroir au meuble.
- La pulsation d'une fonction de période T vaut $\omega = 2\pi/T$; pour une fonction paire, les coefficients b_n sont nuls.
- La somme partielle $s_n(t)$ comprend le terme constant et les harmoniques de rang 1 à n.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle : f(t) en centimètres et t en secondes.
- Dans l'algorithme, vérifier le test avant chaque incrémentation et s'arrêter au premier test faux.
- Distinguer le coefficient constant a_0 des coefficients cosinus a_n dans la série de Fourier.
- Pour le tracé demandé, appliquer correctement la parité et la période 2π sur tout l'intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment relier les conditions initiales du tiroir à la fonction f ?

La distance initiale donne f(0) = 20 cm. La vitesse initiale est la dérivée de cette distance : le déplacement vers O étant indiqué comme négatif, $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Q : Comment déterminer le moment où l'algorithme considère le tiroir fermé ?

L'algorithme augmente t par pas de 0,1 tant que f(t) est strictement supérieure à 0,5. Il s'arrête au premier test faux ; la valeur finale de t donne alors le temps correspondant au seuil de fermeture.

Q : Quelle est la durée de l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points chacun. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique.

Q : Quelle propriété de la fonction simplifie les coefficients de Fourier ?

La fonction est paire, donc tous les coefficients sinus b_n sont nuls. Le formulaire permet également de calculer les coefficients cosinus à partir d'une intégrale sur la moitié positive de la période.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsic.fr/assets/annales/bts-ic/E2 - Mathématiques/2023/BTS IC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Industries Céramiques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.