Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS INDUSTRIES CÉRAMIQUES • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - BTS Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsic.fr/assets/annales/bts-ic/E2 - Mathématiques/2022/BTS IC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. L’exercice porte sur une équation différentielle, les variations de cette fonction, la distance parcourue, puis son développement limité et la tangente en début de freinage.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l’intervalle considéré.

La formule des solutions de l’équation homogène $y' + ay = 0$ est $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0{,}8$. On remplace ce coefficient dans la formule pour obtenir toutes les solutions sur $[0; +[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est solution de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$, égal au membre de droite. Cette égalité est vraie pour tout t, donc g est bien une solution de l’équation proposée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0{,}8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. Une solution particulière de l’équation complète est $g(t) = 5$.
2. Les solutions de l’équation homogène associée sont $ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
3. On additionne une solution particulière et la solution générale de l’équation homogène. Cela donne toutes les solutions de l’équation complète.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale s'applique à $t = 0$, et $e^0 = 1$: ainsi, $f(0) = 5 + k = 20$, donc $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la fonction recherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5, sachant que f(t) = 15e^(-0,8t) + 5.**

Lorsque $t \to +$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend donc vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5. La limite de la fonction est ainsi égale à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente une équation de l'asymptote à la courbe représentative C de f.**

> Une limite finie L de $f(t)$ lorsque $t \to +$ donne une asymptote horizontale d'équation $y = L$. La limite obtenue à la question précédente est 5. La courbe $\mathcal{C}$ admet donc cette droite horizontale comme asymptote en $+\infty$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **À partir de l'expression fournie pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5. On rassemble ces informations dans le tableau :

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0;+[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, il faudrait que sa vitesse atteigne zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive et $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule donc jamais. Elle se rapproche de $5\,\mathrm{m/s}$ sans l'atteindre, et le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste supérieure à $5\,\mathrm{m/s}$ et tend vers $5\,\mathrm{m/s}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18{,}75e^{-0,8t} + 5t$. Par la dérivation d'une exponentielle composée, $(e^{-0,8t})' = -0{,}8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$: F est donc une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. En utilisant l'intégrale de la vitesse entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, calculer la distance parcourue par le chariot, donner sa valeur exacte puis l'arrondir au centimètre.

1. La distance parcourue entre 0 et 1 vaut $d = \int_0^1 f(t)\,dt$.
2. Avec la primitive donnée, $d = F(1) - F(0) = (-18{,}75e^{-0,8} + 5) - (-18{,}75)$.
3. On obtient la valeur exacte $23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}$ m, puis on arrondit au centimètre.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8} \approx 15{,}33\,\mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, recopier le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro qui correspond au résultat du logiciel. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

> Le logiciel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est donc la troisième proposition qui convient, car $4{,}8 = \frac{24}{5}$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. D'après les données, $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12. En reportant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient l'expression demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d’un système électrique

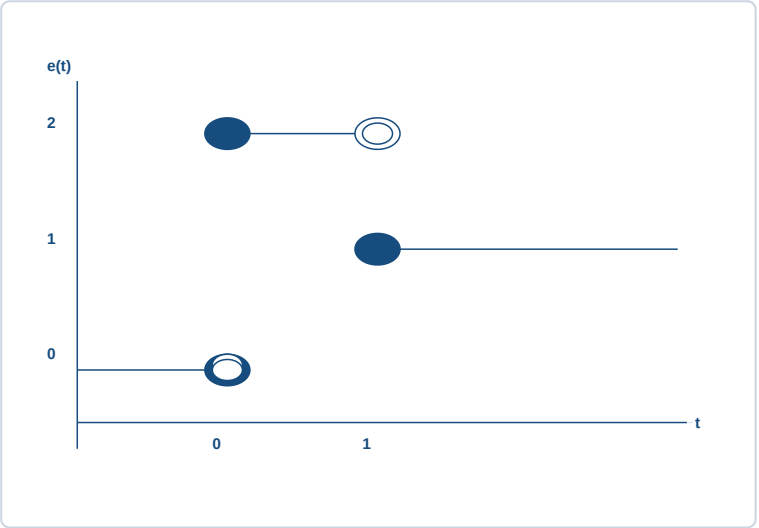
Un système électrique causal reçoit un signal d’entrée défini à l’aide de la fonction échelon unité et possède une fonction de transfert donnée. L’exercice demande de représenter le signal d’entrée, de calculer des transformées de Laplace, puis de déterminer et représenter le signal de sortie.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative du signal d’entrée e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

La définition de l’échelon donne trois niveaux : nul avant 0, égal à 2 de 0 inclus à 1 exclu, puis égal à 1 à partir de 1. Sur le graphe, les segments sont horizontaux. Les cercles ouverts indiquent les valeurs exclues aux sauts, et les cercles pleins les valeurs prises par la fonction : en particulier, e(0)=2 et e(1)=1.

Courbe du signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, 2 si $0 \leq t < 1$, et 1 si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer E(p), la transformée de Laplace du signal d’entrée.

Par linéarité de la transformée de Laplace et d’après le formulaire, $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$. Le retard d’une unité donne $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$. On transforme donc séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, puis on les combine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

1. La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$.
2. En remplaçant par $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on obtient $S(p) = (2 - e^{-p})/[p(p+1)]$.
3. La séparation des termes donne l'expression demandée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On met les deux fractions au même dénominateur. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$, ce qui établit l'égalité. Cette décomposition sera utilisée pour retrouver la transformée inverse de chaque terme.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Les deux premières inverses se lisent directement dans le formulaire. Pour les deux autres, on applique la propriété de retard d'une unité : si une transformée est multipliée par e^{-p}, la fonction correspondante est retardée et multipliée par $U(t-1)$.

- $1/p$: $U(t)$.
- $1/(p+1)$: $e^{-t}U(t)$.
- e^{-p}/p : $U(t-1)$.
- $e^{-p}/(p+1)$: $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

On écrit $1/[p(p+1)] = 1/p - 1/(p+1)$. Le premier terme de $S(p)$ a donc pour inverse $2(U(t) - e^{-t}U(t))$. Sur $[0;1[$, le terme retardé est nul puisque $U(t-1) = 0$. Il reste ainsi le premier terme, avec son facteur 2.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. En utilisant l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1), donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

1. On utilise l'expression admise pour $t \geq 1$: $s(1) = (e - 2)e^{-1} + 1$.
2. En simplifiant, $s(1) = 1 + (e - 2)/e = 2 - 2/e$.
3. Avec $e \approx 2,71828$, la valeur arrondie au dixième est $1,3$.

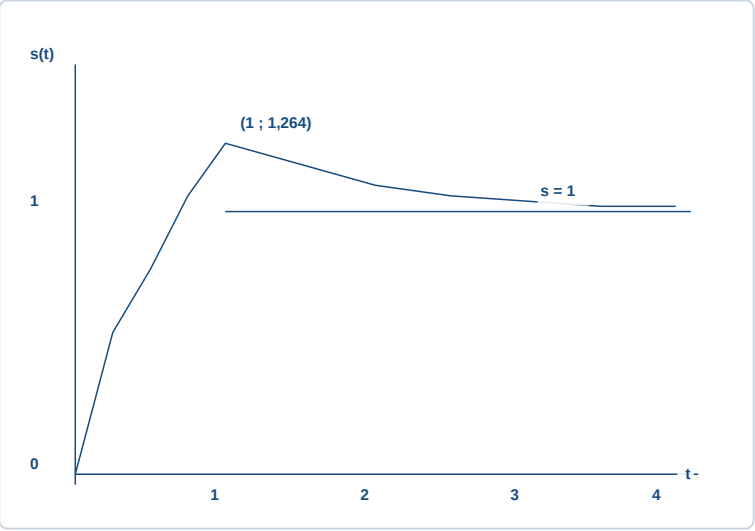
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, la sortie suit $2(1 - e^{-t})$, part de 0 et croît. À $t = 1$, elle vaut $2 - 2/e \approx 1,264$. Pour $t \geq 1$, la branche donnée dans l'énoncé décroît vers 1. Le raccord se fait au point $(1; 2 - 2/e)$, et la droite $s = 1$ est une asymptote horizontale.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe croissante de $(0;0)$ à $(1; 2 - 2/e)$, puis décroissante vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

1. Pour $t \geq 1$, l'expression admise est $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$.

2. Comme e^{-t} tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel disparaît à la limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot par une fonction exponentielle, puis la réponse d'un système électrique avec les transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ est 5 et l'asymptote horizontale est y = 5.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle considéré.
- Un retard temporel f(t - a)U(t - a) correspond en Laplace à F(p)e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour résoudre l'équation différentielle complète, ajouter une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Justifier les variations à partir du signe de la dérivée et indiquer les limites aux bornes du domaine.
- Pour une distance, évaluer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et respecter l'unité demandée.
- Pour tracer un signal échelon, distinguer les intervalles déterminés par les instants de saut et respecter la causalité.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Remplacez ensuite t par 0 et la fonction par sa valeur initiale afin de déterminer la constante.

Q : Comment déterminer une distance à partir de la fonction de vitesse ?

La distance entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse sur $[t_0 ; t_1]$. Avec une primitive F, elle se calcule par $F(t_1) - F(t_0)$, puis s'exprime en mètres.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les deux, réservez une marge pour les questions de tracé et de calcul, et vérifiez les unités ainsi que les réponses à rendre sur le document-réponse.

Q : Quel coefficient s'applique à mon BTS dans ce sujet ?

Le sujet indique deux coefficients selon la spécialité : 1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques et 2 pour Électrotechnique. Le barème par question n'est pas détaillé dans le sujet fourni.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsic.fr/assets/annales/bts-ic/E2 - Mathématiques/2022/BTS IC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Industries Céramiques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.