Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

## SESSION 2022

## Épreuve de mathématiques

## GROUPEMENT B *CODE : 22MATGRB1*

## Durée : 2 heures

| SPÉCIALITÉS | COEFFICIENTS |
|---|---|
| Aéronautique | 2 |
| Aménagement finition | 2 |
| Assistance technique d'ingénieur | 2 |
| Bâtiment | 2 |
| Conception et réalisation de carrosseries | 2 |
| Conception et réalisation des systèmes automatiques | 2 |
| Enveloppe des bâtiments : conception et réalisation | 2 |
| Environnement nucléaire | 2 |
| Études et économie de la construction | 2 |
| Fluides – énergies – domotique | 2 |
| Maintenance des systèmes | 2 |
| Traitement des matériaux | 3 |
| Travaux publics | 2 |

**L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.**
**L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.**

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.**
**Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.**

## EXERCICE 1 (10 points)

Un chariot d'une fête foraine est propulsé à une vitesse de $20\ \text{m.s}^{-1}$ sur un axe horizontal, puis il est ralenti par un système de freinage.

On s'intéresse à la vitesse du chariot durant le freinage.

On note $f(t)$ la vitesse du chariot à l'instant $t$.
$f(t)$ est exprimé en mètre par seconde, et $t$ est exprimé en seconde.

L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le chariot commence à être pris en charge par le système de freinage. On a donc $f(0) = 20$.

On suppose que $f$ est une fonction dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

***Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.***

**Partie A - Résolution d'une équation différentielle.**

On admet que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}8\,y = 4\ ,$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $t$, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et où $y'$ est la fonction dérivée de $y$.

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 0{,}8y = 0$.

   On fournit la formule suivante :

| Équation différentielle | Solutions sur un intervalle $I$ |
|---|---|
| $y' + ay = 0$ | $y(t) = k\text{e}^{-at}$ |

   **b.** Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = 5$.
   Vérifier que la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

   **c.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

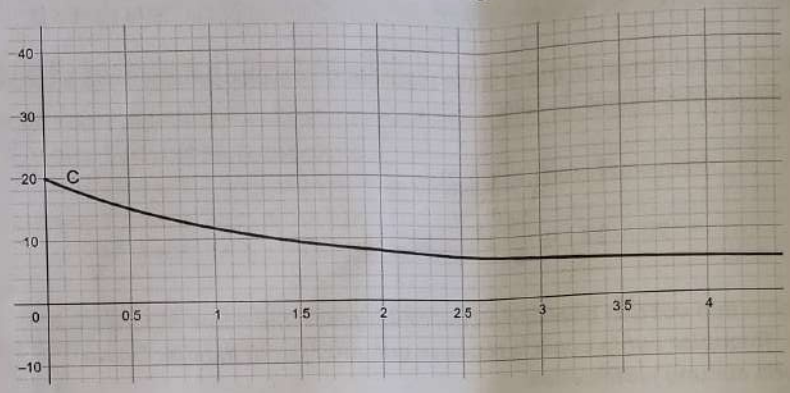
2. On rappelle que $f(0) = 20$.
   Déterminer la solution $f$ de l'équation $(E)$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 20$.

**Partie B - Étude de la fonction $f$ .**

On admet que la fonction $f$ est définie pour tout $t$ appartenant à $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5\,.$$

Sa courbe représentative $C$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.




**1.a.** Démontrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 5$ .

**b.** En déduire que la courbe $C$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

**2.** On admet que, pour tout réel $t$ appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(t) = -12\mathrm{e}^{-0{,}8t}\,.$$

Dresser le tableau de variation de $f$ sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

**3.** Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

**4.** Soit $F$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -18{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5t$ .

**a.** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur $[0\,;+\infty[$.

**b.** On admet que la distance $d$, exprimée en mètre, parcourue par le chariot entre les instants $t_0$ et $t_1$, est donnée par :

$$d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt\,.$$

Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ . Donner une valeur arrondie au centimètre.

**Partie C - Étude locale.**

On rappelle que l'on étudie la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5\ .$$

On rappelle que sa courbe représentative $C$ est reproduite au début de la **partie B**.

Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f$ au voisinage de zéro.

| | |
|---|---|
| 1 | PolynômeTaylor(f(t), t, 0, 2)<br>$\rightarrow\ 20 - 12\,t + \frac{24}{5}\,t^2$ |

1. ***Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.***
   ***Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.***

Le développement limité de la fonction $f$ à l'ordre 2 au voisinage de zéro est :

| | | |
|---|---|---|
| $20 - 12\,t + \frac{24}{5}\,t^2 + \epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$ | $20 + \frac{24}{5}\,t^2$ | $20 - 12\,t + 4{,}8\,t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$ |

2. Donner une équation de la tangente $T$ à la courbe $C$ au point d'abscisse $0$.

## EXERCICE 2 (10 points)

Une usine fabrique des tubes fluorescents. Des tests de conformité permettent de vérifier si les tubes présentent un défaut.

***Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.***

### Partie A - Probabilités conditionnelles.

L'entreprise possède deux ateliers de production des tubes : atelier 1 et atelier 2.

- L'atelier 1 produit 30 % des tubes.
  - Parmi eux, 1,5% présentent un défaut.
- L'atelier 2 produit 70 % des tubes.
  - Parmi eux, 2,5% présentent un défaut.

On prélève au hasard un tube parmi la production totale de l'usine.
On définit les événements suivants :

- $A_1$ : « le tube provient de l'atelier 1 » ;
- $A_2$ : « le tube provient de l'atelier 2 » ;
- $D$ : « le tube présente un défaut ».

**1.** Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

**2.** Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$.

**3.** Montrer que $P(D) = 0,0195 = 0,0220$

**4.** On sait que le tube ne présente pas de défaut.
Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2 ?

**Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents.**

On considère la variable aléatoire $T$ qui, à tout tube fluorescent prélevé au hasard dans le stock, associe sa durée de bon fonctionnement en heure.

On suppose que $T$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0001$.

On rappelle les formules suivantes :

| Loi exponentielle | |
|---|---|
| $P(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ | $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ |

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
2. Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-2}$ , que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit inférieure à $8000$ heures.
3. Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-2}$, que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit supérieure à $10\,000$ heures.

**Partie C - Intervalle de confiance.**

La fixation des tubes fluorescents se fait à l'aide de rivets produits dans une usine.
On cherche la proportion $p$ de rivets conformes parmi l'ensemble de la production.

Pour cela, on prélève au hasard dans la production un échantillon de $1000$ rivets. Ce prélèvement peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.

On constate que, sur les $1000$ rivets prélevés, $975$ d'entre eux sont conformes.

1. Donner une estimation ponctuelle $f$ de la proportion inconnue $p$.
2. Soit $F$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de $1000$ rivets ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des rivets conformes.

   On admet que $F$ suit la loi normale de moyenne $p$ inconnue et d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{1000}}$.

   On donne la formule suivante :

| Intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95%. |
|---|
| $\left[ f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$ |

   Déterminer un intervalle de confiance centré sur $f$ de la proportion $p$ au niveau de confiance de $95\%$. Arrondir les bornes de l'intervalle à $10^{-3}$ près.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.