Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS INDUSTRIES CÉRAMIQUES • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : de 1 à 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du départ d'un train à propulsion électromagnétique et calcul d'aire** (13 questions) — **Page 3**

2. **Probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse sur l'obsolescence des smartphones** (13 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsic.fr/assets/annales/bts-ic/E2 - Mathématiques/2018/BTS IC - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation du départ d'un train à propulsion électromagnétique et calcul d'aire

Le sujet étudie le départ d'un wagon de train à très haute vitesse dans un tube à basse pression à partir d'une fonction modélisant la distance parcourue. Il examine aussi l'aire d'une pièce destinée à l'aménagement des futures gares, définie par un graphique et une fonction.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' − 0,2y = 0.

On réécrit l'équation sous la forme $y' = 0,2y$. La solution générale d'une équation différentielle $y' = ay$ est $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,2$. Cette expression décrit toutes les solutions sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = −15t − 75 est une solution de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

La dérivée de la fonction proposée est $g'(t) = -15$. Substituons g dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$. L'égalité vaut pour tout $t \in [0, 3]$, donc la fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle avec second membre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = -15t - 75$ est bien une solution de $y' - 0,2y = 3t$.

Question 3°. Déduire de la solution particulière donnée et des solutions de l'équation homogène l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière toutes les solutions de l'équation homogène associée. Ici, la solution particulière est $g(t) = -15t - 75$, et la solution homogène générale est $Ce^{0,2t}$. La somme de ces expressions fournit l'ensemble des solutions, avec une constante réelle arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t} - 15t - 75$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 0, sachant qu'à t = 0 le wagon est au point de départ.

On utilise la solution générale trouvée précédemment : $f(t) = Ce^{0,2t} - 15t - 75$. À l'instant initial, $f(0) = C - 75$. La condition $f(0) = 0$ impose donc $C = 75$. En reportant cette constante dans l'expression générale, on obtient la fonction qui modélise la distance parcourue par le wagon.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir de l'expression fournie pour f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

La dérivée fournie est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15 = 15(e^{0,2t} - 1)$. Comme $15 > 0$, le signe de $f'(t)$ est celui de $e^{0,2t} - 1$. Or l'exponentielle est au moins égale à 1 lorsque son exposant est positif ou nul. Sur l'intervalle considéré, $0,2t \geq 0$, donc l'inégalité est satisfaite partout.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire de l'étude du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur [0, 3].

La dérivée est nulle en $t = 0$, puis positive sur $]0, 3]$. La fonction est donc croissante sur tout l'intervalle. À ses bornes, $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$. Le tableau récapitule le signe de la dérivée et les variations.

t	**0**	$]0, 3]$	**3**
Signe de $f'(t)$	0	+	+
Variation de f	0	croissante	$16,659$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante de 0 à $16,659$ km sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième de kilomètre.

La distance parcourue après une minute est la valeur de la fonction en $t = 1$. En remplaçant dans l'expression donnée, on obtient $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,6052$ km. On conserve la valeur non arrondie pour appliquer ensuite l'arrondi demandé au dixième de kilomètre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après une minute, le wagon a parcouru $1,6$ km.

Question 3° a). En utilisant le fait que la vitesse instantanée correspond à f'(t), déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes, en kilomètres par minute, arrondie au dixième.

La vitesse instantanée est donnée par la dérivée $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$, en kilomètres par minute. À deux minutes, $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,3774$. L'arrondi au dixième demandé s'effectue après le calcul, et l'unité reste le kilomètre par minute.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 2 minutes, la vitesse est $7,4$ km/min.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse visée avant deux minutes.

La vitesse visée correspond à $400/60 \approx 6,667$ km/min. La vitesse $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$ augmente sur $[0, 3]$, part de zéro et vaut environ $7,377$ km/min à deux minutes. Elle franchit donc le seuil avant deux minutes. En résolvant $15(e^{0,2t} - 1) = 400/60$, on trouve $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le seuil de 400 km/h est atteint vers 1,839 min, donc avant 2 min.

Question 4°. Choisir parmi les trois propositions l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 s'écrit $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. Or $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$. En développant et en regroupant les termes, on obtient l'expression correspondant à la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir l'aire du rectangle OPQR parmi les trois propositions, à partir du graphique et des dimensions indiquées. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sur le graphique, le rectangle $OPQR$ s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, soit une largeur de 3 unités. Sa hauteur est donnée par la droite supérieure $y = 2,25$. Son aire est donc le produit de ces deux dimensions. Parmi les choix proposés, il faut retenir celui qui vaut $3 \times 2,25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ unités d'aire.

Question 2°. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3, en exploitant la primitive fournie.

Comme $g(x) \geq 0$ sur $[0, 3]$, l'aire cherchée est $\int_0^3 g(x)\,dx$. Avec la primitive fournie, $G(x) = \frac{27}{4}\ln(x^2 + 9) + c_1$, on obtient $A_2 = G(3) - G(0)$. La constante disparaît et la différence des logarithmes donne $\frac{27}{4}\ln 2$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ unités d'aire.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A de la région hachurée, en tenant compte de la symétrie de la pièce, et arrondir au millième.

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle diminuée de l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées double cette aire. Ainsi, $A = 2(A_1 - A_2) = 2(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2)$. L'arrondi au millième donne l'aire totale recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'aire totale hachurée est $A \approx 4,143$ unités d'aire.

2. Probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse sur l'obsolescence des smartphones

L'exercice étudie deux types d'obsolescence programmée, technique et logicielle, observés sur des smartphones, puis modélise les pannes non réparables d'un modèle particulier. Il se termine par un test bilatéral destiné à vérifier une affirmation issue d'un sondage sur la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des proportions données pour les obsolescences technique et logicielle et de leur intersection, compléter le tableau d'effectifs des 200 smartphones.

Sur 200 smartphones, 3 % représentent 6 appareils touchés par l'obsolescence technique et 8 % représentent 16 appareils touchés par l'obsolescence logicielle. Parmi ces 16, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2 smartphones. On complète ensuite chaque case avec les totaux des lignes et des colonnes.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau des effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	
Total			200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Les quatre effectifs intérieurs, dans l'ordre du tableau, sont 2, 4, 14 et 180 smartphones.

Question 2°. Pour les événements T, « le smartphone est touché par l'obsolescence technique », et L, « le smartphone est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et la probabilité conditionnelle P_L(T).

Les proportions données dans l'énoncé permettent de lire directement les probabilités simples : 3 % pour l'obsolescence technique et 8 % pour l'obsolescence logicielle. La donnée conditionnelle concerne les smartphones déjà touchés par l'obsolescence logicielle : parmi eux, 12,5 % sont aussi touchés techniquement. On la note donc $P_L(T)$, et non $P(T \cap L)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$; $P(L) = 0{,}08$; $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité que le smartphone soit à la fois touché par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle, soit P(T ∩ L).

La probabilité conditionnelle vérifie $P_L(T) = P(T \cap L) / P(L)$. On en déduit la probabilité conjointe en multipliant par P(L) : $P(T \cap L) = 0{,}125 \times 0{,}08 = 0{,}01$. Cela signifie que 1 % des smartphones sont atteints par les deux types d'obsolescence, soit 2 appareils dans la population étudiée de 200 smartphones.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(T ∩ L) = 0,01, soit 1 % des smartphones et 2 appareils sur les 200 observés.

Question 3° b). Calculer la probabilité que le smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence, soit P(T ∪ L).

Pour obtenir la probabilité d'être atteint par au moins un type d'obsolescence, on additionne les probabilités de T et de L puis on retranche leur intersection, qui serait sinon comptée deux fois. L'application de la formule donne :

1. P(T ∪ L) = P(T) + P(L) − P(T ∩ L).
2. P(T ∪ L) = 0,03 + 0,08 − 0,01 = 0,10.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins un type d'obsolescence est 0,10, soit 10 %.

Question 3° c). Calculer la probabilité conditionnelle P_T(L), c'est-à-dire la probabilité d'une obsolescence logicielle sachant qu'il y a obsolescence technique.

La probabilité demandée est conditionnelle à l'événement T : on rapporte donc la probabilité d'être touché par les deux formes d'obsolescence à la probabilité d'être touché techniquement. Ainsi, $P_T(L) = P(T \cap L) / P(T) = 0{,}01 / 0{,}03 = 1/3$. L'arrondi au millième est 0,333.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = 1/3 \approx 0{,}333$, soit environ 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables parmi 50 prélèvements assimilés à des tirages avec remise, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise : les essais sont indépendants et la probabilité de sélectionner un smartphone non réparable reste la même à chaque tirage. On compte, parmi les 50 tirages, le nombre de smartphones non réparables. Les conditions d'application d'une loi binomiale sont donc réunies, avec 50 essais et une probabilité de succès égale à 4,5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones d'un lot soient tous réparables.

Un smartphone est réparable avec la probabilité 1 − 0,045 = 0,955. Pour que les 50 smartphones soient tous réparables, il faut que cette issue se produise à chacun des tirages indépendants. La probabilité recherchée est donc le produit des 50 probabilités identiques, soit $0{,}955^{50}$. L'arrondi au millième, demandé dans l'exercice, donne 0,100.

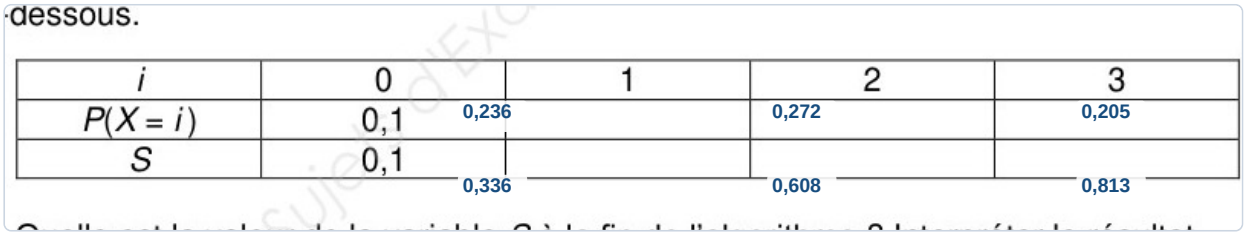
> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est 0,100, soit environ 10,0 %.

Question 3° a). Exécuter à la main l'algorithme donné et compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de la somme S pour i allant de 0 à 3.

Pour chaque entier i de 0 à 3, la probabilité est obtenue par la formule binomiale $P(X = i) = C(50,i) \times 0{,}045^{i} \times 0{,}955^{50-i}$. On ajoute ensuite chaque terme à la somme S déjà calculée. Les valeurs du tableau sont arrondies au millième ; les additions successives sont effectuées à partir des probabilités non arrondies.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau de l'algorithme complété



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur finale de S à la fin de l'algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte du nombre de smartphones non réparables.

La boucle additionne les probabilités correspondant aux quatre valeurs i = 0, 1, 2 et 3. La somme finale est donc $P(X \leq 3)$, puisque X compte les smartphones non réparables du lot. D'après les probabilités calculées dans le tableau, S vaut environ 0,813. Cette valeur représente la proportion de lots de 50 smartphones contenant au plus trois appareils non réparables.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S = P(X \leq 3) \approx 0{,}813$: environ 81,3 % des lots ont au plus trois appareils non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte des lots de smartphones.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est E(X) = np. Ici, E(X) = 50 × 0,045 = 2,25. L'espérance n'est pas nécessairement un nombre entier pour un lot particulier : elle indique qu'en considérant un grand nombre de lots de 50 smartphones, le nombre moyen de téléphones non réparables par lot est 2,25.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(X) = 2,25 : un lot de 50 smartphones contient en moyenne 2,25 appareils non réparables.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle, choisir la valeur de h arrondie au centième telle que l'intervalle centré sur 0,55 contienne la fréquence F avec une probabilité de 0,95. Une seule des trois propositions est exacte.

Sous H_0, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart-type 0,037. Pour un intervalle central de 95 %, la valeur centrée réduite est environ 1,96. On obtient donc h ≈ 1,96 × 0,037 = 0,07252, qui s'arrondit à 0,07 au centième. Parmi les trois propositions de l'énoncé, il faut choisir 0,07.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur de h arrondie au centième est 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 % pour les hypothèses H_0 : p = 0,55 et H_1 : p ≠ 0,55.

Le test est bilatéral au seuil de 5 %. On retient l'intervalle centré sur 0,55 déterminé à la question précédente, avec h ≈ 0,07. La décision se prend en comparant la fréquence observée à ses deux bornes :

- Si 0,48 ≤ F ≤ 0,62, on ne rejette pas H_0.
- Si F < 0,48 ou F > 0,62, on rejette H_0 au profit de H_1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si 0,48 ≤ F ≤ 0,62 ; rejeter H_0 si F est hors de cet intervalle.

Question 3°. À partir des 76 réponses positives recueillies auprès de 180 personnes, conclure le test concernant l'affirmation selon laquelle 55 % des Français pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

La fréquence constatée dans l'échantillon est F = 76/180 ≈ 0,422. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de décision. La fréquence observée appartient donc à la zone de rejet du test bilatéral au seuil de 5 %. Les données de l'enquête conduisent à rejeter l'hypothèse selon laquelle la proportion est égale à 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 au seuil de 5 % : l'enquête remet en cause l'affirmation p = 0,55.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 3. Deux exercices de dix points étudient le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence des smartphones, mobilisant équations différentielles, étude de fonctions, intégrales, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' - 0{,}2y = 3t$, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance : si f est en kilomètres et t en minutes, f'(t) s'exprime en kilomètres par minute.
- Pour une variable X suivant une loi binomiale B(n, p), E(X) = np et P(X ≤ k) est la somme des probabilités P(X = i) pour i de 0 à k.
- Dans un test bilatéral, on rejette H_0 si la fréquence observée est hors de l'intervalle de décision associé au seuil de signification.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le domaine de définition et distinguer clairement la solution homogène de la solution particulière.
- Vérifier les unités avant de comparer une vitesse en kilomètres par minute à un objectif en kilomètres par heure.
- Pour les probabilités conditionnelles, identifier l'événement conditionnant avant de choisir numérateur et dénominateur.
- Dans le test d'hypothèse, appliquer la règle de décision au résultat observé et formuler une conclusion dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire avec un second membre ?

On résout d'abord l'équation homogène associée, puis on ajoute une solution particulière de l'équation complète. On utilise enfin la condition initiale pour déterminer la constante et identifier la fonction recherchée.

Q : Comment choisir la loi binomiale dans un exercice de prélèvement ?

Il faut un nombre fixe d'essais, deux issues possibles par essai, une probabilité de succès constante et des essais indépendants. Ici, le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise, ce qui justifie ces conditions.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de dix points chacun. Le sujet autorise les calculatrices. Le coefficient dépend de la spécialité de BTS et varie de 1 à 3.

Q : Comment conclure correctement le test d'hypothèse ?

On compare la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation défini sous H_0 au seuil de 5 %. Si elle est hors de l'intervalle, on rejette H_0 ; sinon, on ne la rejette pas, sans prétendre la prouver.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsic.fr/assets/annales/bts-ic/E2 - Mathématiques/2018/BTS IC - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Industries Céramiques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.